Complement du chapitre 3
(Explicatif)

* Page 1 slides 2 - 3

$a_{ij} \longrightarrow j^{ème}$ colonne
$\hookrightarrow i^{ème}$ ligne

1re ligne →
2e ligne →

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

↑ 1ère colonne ↑ 2e colonne

$a_{11} = 1$ $a_{12} = a$
$a_{21} = i$ $a_{22} = 0$.

$i \in \mathbb{C}$
donc A est une matrice complexe

* Page 3 slide 5 - 6

→ A est une matrice complexe, B est matrice réelle
→ Matrice identité ou matrice unité : tous les éléments de la diagonale sont égale à 1, le reste des éléments $\underline{=0}$

* Page 4 slide 8.

→ on multiplie tous les elements de la matrice par la même constante

* Page 5 slide 9

$$A = \begin{pmatrix} 5 & a \\ 7 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

A + B n'existe pas.
Car elles ne sont pas de ~~ne~~ même type !

* Page 6 slide 10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & a \\ 7 & b \end{pmatrix} \quad B = (2, 7)$$

dans cet ordre $\underline{A \times B}$ n'existe pas car A a $\underline{2}$ colonnes.
B a $\underline{1}$ ligne

par contre
dans cette ordre $\underline{B \times A}$ existe car B a ~~deux~~ deux colonnes
A a deux lignes.

. page 7 slide 14
. Pour trouver la transposée d'une matrice M.

les lignes de la matrice M deviennent des Colonnes pour la matrice transposée ${}^tM$.

$$M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \longrightarrow {}^tM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Colonne $\longrightarrow$ ligne

page 9 Slide 17

* Une matrice symetrique ou antisymetrique ne peut être qu'une matrice carrée

en effet supposons M est de type (m,n) alors ${}^tM$ est de type (n,m)

or $(M_{ij})_{m,n} = ({}^tM_{ji})_{n,m}$

deux matrices ne peuvent être egales que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes

$\Rightarrow$ $\boxed{m = n}$ donc M est obligatoirement de type (n,n) c.a.d carrée

* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ${}^tM = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

M est symetrique si $M = {}^tM$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} d = b \\ g = c \\ f = h \end{array} \right.$$

donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$

les element de M sont symetrique par rapport à la diagonale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & i \\ 3 & 0 & x \\ i & x & 2 \end{pmatrix}$$

diagonale

M. ABID

M est antisymétrique $M = -{}^tM$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} a=-a & e=-e & i=-i! \\ d=-b & g=-c & \\ f=-h. & & \end{array} \right.$$

$a=-a \Rightarrow a=0$ et m̂ $e=i=0$.

M est antisymétrique si elle s'écrit comme suit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & y \\ -4 & 0 & \sqrt{3} \\ -y & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

✗ page 10 slide 17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=a+c=1 \\ a+b=b+d=0 \\ c=c=0 \\ c+d=d=1. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} c=0 \\ d=1 \\ b=-d \\ b=-a \\ a=1 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad A^{-1}=B$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

✗ page 16 slide 23

$V_1 = (1, 0, 0) \quad V_2 = (0, 1, 1) \quad V_3 = (1, 1, 1).$

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, \gamma, \gamma) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \beta+\gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha=-\gamma \\ \beta=-\gamma \end{array}. \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = -\gamma V_1 - \gamma V_2 + \gamma V_3 = \gamma(-V_1 - V_2 + V_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \forall \gamma.$

1) Abs ⇒ $V_3 = V_1 + V_2$.

$\Rightarrow \{V_1, V_2, V_3\}$ syst lié

On peut voir que la troisième colonne est la somme de la première et la 2e colonne.

On vérifie maintenant le syst $\{V_1, V_2\}$

$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ donc $\{V_1, V_2\}$ est système libre

$\underline{rg\, M = 2}$

<u>page 15 slide 30</u>

On détermine les images des vecteurs formant la base de l'espace de départ E ($B = \{e_1 \dots e_n\}$)

Soit $\{f(e_1); f(e_2) \dots f(e_n)\}$.

alors le rg f est donné par le nombre maximal de vecteurs $f(e_1) \dots f(e_n)$ faisant linéairement indépendant

<u>ex</u>

$B_E = B_F = \{\underbrace{(1,0,0,0)}_{e_1}; \underbrace{(0,1,0,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{e_3}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_4}\}$

$f: E \longrightarrow F$

$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z,t) \longrightarrow f(x,y,z,t) = (x+y+3z, x+z+t, y+2z-t, x+z+t)$

$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,1,0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0,0) = (1,0,1,0)$.

$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (3,1,2,1)$

$f(e_4) = f(0,0,0,1) = (0,1,-1,1)$

la Matrice associée est

$$\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut voir facilement que $f(e_4) = f(e_1) - f(e_2)$

4e colonne $= 1^{ière}$ colonne $- 2^{e}$ colonne.

$\Rightarrow \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ est lié

on vérifie $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$. on trouve $\beta = 2\alpha$ $\gamma = -\alpha$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f(e_1) + 2\alpha f(e_2) - \alpha f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\Rightarrow \alpha (f(e_1) + 2f(e_2) - f(e_3)) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow f(e_3) = 2f(e_2) + f(e_1)$

3e colonne $= 2 \times 2^{e}$ colonne $+ 1^{e}$ colonne.

$\Rightarrow \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est lié

on passe maintenant à $\{f(e_1), f(e_2)\}$.

$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \underline{\alpha = \beta = 0}$

M. ABID

$\Rightarrow$ $\{f(e_1), f(e_2)\}$ st- libre $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $rg f = \dim \operatorname{Im} f = 2 = rg M$.

M. ABID

Scanné avec CamScanner